www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1990

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

OPTION M' : I, II, III. OPTION P' : I, II.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur le corps C des complexes, et $\mathfrak{L}$ l'algèbre des endomorphismes de E. Si a et b sont des éléments de $\mathfrak{L}$, on note ab l'endomorphisme $a \circ b$; pour tout entier $k \geqslant 0$, a^k est l'endomorphisme défini par récurrence par $a^{k+1} = a^k a$ et $a^0 = I$, endomorphisme identique de E.

On dit qu'une partie $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{L}$ est une sous-algèbre si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel tel que, pour tout couple d'éléments a, b de $\mathfrak{A}$, ab appartienne à $\mathfrak{A}$; on souligne que I peut ne pas appartenir à $\mathfrak{A}$.

Soit $\mathfrak{S}$ une partie non vide de $\mathfrak{L}$. On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est *stable par* $\mathfrak{S}$ si l'image de V par tout endomorphisme $a \in \mathfrak{S}$ est incluse dans V. On dit que $\mathfrak{S}$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par $\mathfrak{S}$ sont $\{0\}$ et E lui-même.

Enfin, tous les espaces vectoriels considérés auront C pour corps des scalaires et, pour toute application linéaire α d'un espace vectoriel dans un autre, $\operatorname{Im}\alpha$ et $\operatorname{Ker}\alpha$ désigneront respectivement l'image et le noyau de α.

[ ]: M' *Les parties* II [*et* III] *sont indépendantes de la question préliminaire et ne dépendent de la partie* I *que par son seul résultat final, fourni par l'énoncé de la question* 5.

Question préliminaire

Vérifier que la partie $\{0\}$ de $\mathfrak{L}$ n'est pas irréductible et que $\mathfrak{L}$ est irréductible.

♦

I

Dans toute cette partie, $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathfrak{L}$, et, pour tout élément $x \in E$, on définit une application linéaire $\hat{x}$ de $\mathfrak{A}$ dans E par $\hat{x}(a) = a(x)$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$.

1. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de dimension non nulle de $\mathfrak{A}$ tel que $am \in \mathfrak{M}$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$ et tout $m \in \mathfrak{M}$ et que, parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{A}$ vérifiant ces conditions, la dimension de $\mathfrak{M}$ soit minimale.

a. Indiquer pourquoi un tel sous-espace $\mathfrak{M}$ existe.

b. On choisit $m \neq 0$ dans $\mathfrak{M}$ puis $e \in E$ tel que $\hat{e}(m) = m(e) \neq 0$. Montrer que l'image $\hat{e}(\mathfrak{M})$ de $\mathfrak{M}$ par $\hat{e}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathfrak{A}$. Trouver cette image et en déduire une inégalité entre n et la dimension de $\mathfrak{M}$.

c. Montrer que $ab \in \operatorname{Ker}\hat{e}$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$ et tout $b \in \operatorname{Ker}\hat{e}$ et en déduire la dimension de $\mathfrak{M} \cap \operatorname{Ker}\hat{e}$.

d. La restriction de $\hat{e}$ à $\mathfrak{M}$ est-elle bijective ? Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}$?

2. Soient $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$ et $e \in E$ choisis comme dans la question 1, et soit x un élément fixé dans E.

a. Montrer qu'il existe un endomorphisme $h \in \mathfrak{L}$ qui est soit un automorphisme de E soit l'endomorphisme nul et qui, pour tout $m \in \mathfrak{M}$, vérifie l'égalité $m(x) = hm(e)$.

.../...

b. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathfrak{M}$, comparer $ahm(e)$ à $ham(e)$ et en déduire que a et h commutent.

c. Comparer les sous-espaces propres de h à leurs images par les éléments $a \in \mathcal{A}$ et montrer que h est une homothétie de E, dont le rapport λ dépend linéairement de x.

d. Pour tout $m \in \mathfrak{M}$, calculer $m(x - \lambda e)$ et en déduire que les endomorphismes m non nuls appartenant à $\mathfrak{M}$ sont tous de rang 1 et que ce sont exactement les endomorphismes dont le noyau est un hyperplan H qui ne dépend que de $\mathfrak{M}$ et non de m.

3. On note désormais $\mathfrak{M}$, e et H respectivement $\mathfrak{M}_1$, e_1 et H_1.

a. Vérifier, à l'aide de l'hyperplan H_1, que $\mathfrak{M}_1$ est strictement inclus dans $\mathcal{A}$.

b. Vérifier que $\mathcal{A} = \mathfrak{M}_1 \oplus \operatorname{Ker} \hat{e}_1$.

c. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{M}_2$ de dimension non nulle dans $\operatorname{Ker} \hat{e}_1$, tel que $am \in \mathfrak{M}_2$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathfrak{M}_2$ et que, parmi les sous-espaces vectoriels de $\operatorname{Ker} \hat{e}_1$ vérifiant ces conditions, la dimension de $\mathfrak{M}_2$ soit minimale. Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}_2$?

d. Montrer que $\mathcal{A}$ est somme directe de sous-espaces vectoriels $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ vérifiant les conditions suivantes : pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $am \in \mathfrak{M}_i$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathfrak{M}_i$, et il existe un élément $e_i \in E$ tel que la restriction de $\hat{e}_i$ à $\mathfrak{M}_i$ soit une bijection sur E.

4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit H_i l'hyperplan noyau commun des endomorphismes m non nuls appartenant à $\mathfrak{M}_i$ et soit ℓ_i un élément du dual E^* de E de noyau H_i.

a. Quelle est l'image de $V = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$ par les éléments $a \in \mathcal{A}$? Quel est le sous-espace V ?

b. Comment l'orthogonal de V dans E^* s'exprime-t-il à l'aide des ℓ_i ?

c. Comparer r à n.

5. Déduire de ce qui précède que la seule sous-algèbre irréductible de $\mathfrak{L}$ est $\mathfrak{L}$ lui-même.

♦

II

Dans cette partie, $\mathcal{G}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E et on note $<\mathcal{G}>$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$ engendré par $\mathcal{G}$.

D'autre part, pour tout $a \in \mathfrak{L}$, on définit l'élément t_a du dual $\mathfrak{L}^*$ de $\mathfrak{L}$ par $t_a(b) = \operatorname{tr}(ab)$ pour tout $b \in \mathfrak{L}$, tr désignant la trace.

6.a. Vérifier que l'application $a \mapsto t_a$ de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}^*$ est linéaire et bijective.

b. Dans le cas où $\mathcal{G}$ est une partie irréductible de $\mathfrak{L}$, $<\mathcal{G}>$ est-elle une algèbre irréductible ? Montrer que la famille $(t_g)_{g \in \mathcal{G}}$ est alors génératrice dans $\mathfrak{L}^*$. [$(t_g)_{g \in \mathcal{G}}$]

7. *Dans toute la suite de la partie* II, on suppose qu'il existe un entier $s \geqslant 1$ tel que $g^s = I$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.

a. Montrer que l'ensemble des complexes $t_g(g')$ lorsque g et g' décrivent $\mathcal{G}$ est fini.

b. Si de plus $\mathcal{G}$ est irréductible, montrer que $\mathcal{G}$ est fini (on pourra utiliser une base convenable de $\mathcal{L}^*$ et la base duale de $\mathcal{L}$).

8. On suppose enfin que $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de $\{0\}$ et de E et stable par $\mathcal{G}$. Soient W un sous-espace supplémentaire de V dans E, p le projecteur de E sur V parallèlement à W et q le projecteur de E sur W parallèlement à V. Pour tout $g \in \mathcal{G}$, on note g_V la restriction de g à V et g_W celle de qg à W.

a. Montrer que $\{g_V ; g \in \mathcal{G}\}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de V et $\{g_W ; g \in \mathcal{G}\}$ un sous-groupe du groupe linéaire de W.

b. Lorsque $g_V = I_V$ et $g_W = I_W$, exprimer g puis g^s en fonction de I et de pgq ; en déduire que l'application $g \mapsto (g_V, g_W)$ est injective sur $\mathcal{G}$.

c. Calculer $(g_V)^s$ et $(g_W)^s$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et déduire de ce qui précède, à l'aide d'une récurrence sur la dimension n, que $\mathcal{G}$ est fini.

♦

III (M' seule)

Dans cette partie, E est muni d'une norme notée $x \mapsto \|x\|$ et $\mathcal{L}$ de la norme définie pour tout $a \in \mathcal{L}$ par $|a| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|a(x)\|$.

9. Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe linéaire de E tel que, pour tout $x \neq 0$ appartenant à E, $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\| > 0$. Montrer que les valeurs propres de tout $g \in \mathcal{G}$ sont de module 1.

10. On suppose réciproquement, dans les questions 10 et 11, que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E tel que, pour tout $g \in \mathcal{G}$, les valeurs propres de g soient de module 1. En outre, dans cette question 10, $\mathcal{G}$ est irréductible.

a. Montrer que $\mathcal{G}$ est une partie bornée de $\mathcal{L}$.

b. En déduire que $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\|$ est strictement positif pour tout $x \neq 0$ de E.

11. On suppose enfin que $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible et on reprend les notations de la question 8.

a. Montrer que les valeurs propres de g_W sont des valeurs propres de g.

b. Montrer que $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\|$ est strictement positif pour tout $x \neq 0$ de E.

12. Dans $\mathbb{C}^2$ rapporté à sa base canonique et muni de la norme définie par $\|x\| = |\xi| + |\eta|$ si $x = (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2$, on considère la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'endomorphismes définis par $g_n((\xi, \eta)) = (\xi, n\xi + \eta)$.

a. Vérifier que la famille (g_n) constitue un sous-groupe $\mathcal{G}$ du groupe linéaire de $\mathbb{C}^2$ et trouver les valeurs propres de g_n.

b. Quelle illustration et quel complément d'information l'exemple de ce groupe $\mathcal{G}$ apporte-t-il aux questions 10 et 11 ?

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail